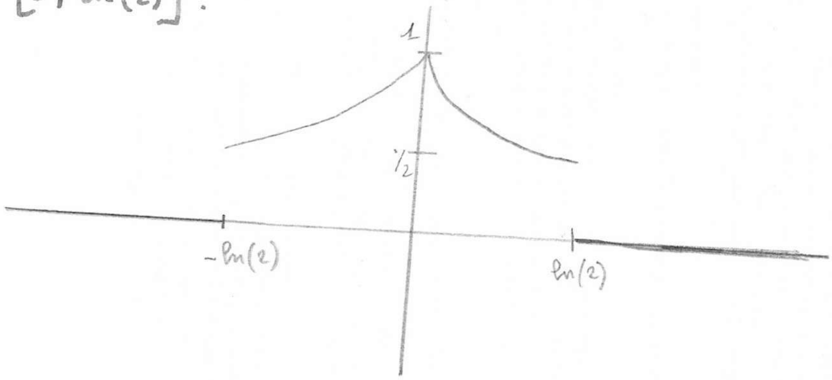
Exercice 1

1) On a $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0;\ln 2] \\ e^{x} & \text{si } x \in [-\ln 2;0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Après étude de la dérivée on en déduit :

- La fonction f est croissante sur $[-\ln(2);0]$ et décroissante sur $[0;\ln(2)]$.



2). La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ (cf le graphique)

- La fonction f est continue sauf en $-\ln(2)$ et $\ln(2)$.

- $\int_0^{\ln(2)} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln(2)} = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$.

et $\int_{-\ln(2)}^{0} e^{x}\,dx = \left[e^{x}\right]_{-\ln(2)}^{0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

et $\int_{-\infty}^{-\ln(2)} f(x)\,dx = 0$ et $\int_{+\ln(2)}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$.

3) (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Si $x < -\ln(2)$ $F(x) = 0$

Si $x \in [-\ln(2);0]$ $F(x) = \int_{-\infty}^{-\ln(2)} f(t)\,dt + \int_{-\ln(2)}^{x} f(t)\,dt$.

$= \left[e^{t}\right]_{-\ln(2)}^{x} = e^{x} - \frac{1}{2}$.

Si $x \in [0;\ln(2)]$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\ln 2}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$

$= \frac{1}{2} + \left[-e^{-t}\right]_0^{x}$

$= \frac{3}{2} - e^{-x}$

Récapitulons

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(2) \\ e^{x} - \frac{1}{2} & \text{si } \cancel{\ln(2)}\, x < 0 \\ \frac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 \leq x < \ln(2) \\ 1 & \text{si } \cancel{\ln(2) \leq}\, x \end{cases}$$

(b) On regarde $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx$

On a $\int_{-\infty}^{-\ln(2)} x f(x)\, dx = 0$

et $\int_{-\ln(2)}^{0} x f(x) = \int_{-\ln(2)}^{0} x e^{x}\, dx = \left[x e^{x}\right]_{-\ln(2)}^{0} - \int_{-\ln(2)}^{0} e^{x}\, dx$

$u = x \quad v' = e^{x}$

$u' = 1 \quad v = e^{x}$

$$= 0 + \frac{\ln(2)}{2} - \left[e^{x}\right]_{-\ln(2)}^{0}$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\ln(2) - 1}{2}.$$

• $\int_{0}^{+\infty} x f(x)\, dx$. On a $\int_{\ln(2)}^{+\infty} x f(x)\, dx = 0$

$\int_{0}^{\ln(2)} x f(x)\, dx = \int_{0}^{\ln(2)} x e^{-x}\, dx = \left[-x e^{-x}\right]_{0}^{\ln(2)} + \int_{0}^{\ln(2)} e^{-x}\, dx$

$u = x \quad v' = e^{-x}$

$u' = 1 \quad v = -e^{-x}$

$$= -\frac{\ln(2)}{2} + 0 + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{\ln(2)}$$

$$= -\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{1 - \ln(2)}{2}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ est absolument convergente. L'espérance de X existe et $\boxed{E(X) = 0.}$

(c) $G(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x)$

Si $x < 0$, $P(|X| \leq x) = 0$ (car $|X| > 0$).

si $x \geq \ln(2)$ $P(|X| \leq x) = P(-x < X \leq x) = 1$ car X tjrs compris entre $-\ln(2)$, $\ln(2)$

Si $0 \leq x \leq \ln(2)$, $\quad P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x)$

$$= \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{car } f \text{ est paire}$$

$$= 2\left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$= 2\left(1 - e^{-x}\right)$$

Ainsi $\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2(1-e^{-x}) & 0 \leq x \leq \ln(2) \\ 1 & \text{si } \ln(2) < x \end{cases}}$

- G est continue car
  - G est continue sur $]-\infty; 0[$
  - G est continue sur $]0; \ln(2)[$
  - G est continue sur $]\ln(2); +\infty[$

  et $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = 2(1-1) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} G(x)$

  $\lim\limits_{x \to \ln(2)^-} G(x) = 1 = \lim\limits_{x \to \ln(2)^+} G(x)$

- G est croissante.
- G est C^1 sauf éventuellement en 0 et en $\ln(2)$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$.

G est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & \text{si } x \in [0, \ln(2)] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

CORRECTION Exercice 18

Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$. on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact au centre O de la $i^{ème}$ fléchette. Ces trois variables X_1, X_2, X_3,. de même loi, indépendantes. sont des variables à. densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Le joueur gagne si la fléchette la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ du centre. Enfin on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

1. f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ (en fait continue en 0)
   $\int_{-\infty}^{0} f = 0$ et $\int_{1}^{+\infty} f = 0$. Enfin, $\int_0^1 f = \int_0^1 2xdx = [x^2]_0^1 = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$
   Pour tout x réel, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ donc
   — si $x \leq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
   — si $x \in]0,1]$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x 2tdt = x^2$
   — si $x > 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^1 2tdt + \int_1^x 0dt = 1$
2. X a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge, ce qui est le cas en $\pm\infty$ (fonction nulle).
   Donc X a une espérance et $E(X) = \int_0^1 2t^2dt = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$
   Conclusion : $\boxed{E(X) = \frac{2}{3}}$
3. $(M > t)$ signifie que la plus petite distance est plus grande que t, c'est à dire qu'elle sont toutes plus grandes que t.
   Conclusion : $\boxed{(M > t) = [(X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap (X_3 > t)]}$
4. Comme elles sont indépendantes,

$$\begin{aligned} F_M(x) &= 1 - P(M > x) = 1 - P(X_1 > x)\,P(X_2 > x)\,P(X_3 > x) \\ &= 1 - (1 - F(x))^3 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{F_M(x) = 1 - (1 - F(x))^3 \text{ pour tout } x \text{ réel.}}$
   Comme F est une fonction de répartition de variable à densité, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.
   Donc F_M est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.
   Donc F_M est une fonction de répartition de variable à densité.
   Conclusion : $\boxed{M \text{ est à densité}}$
   et une densité de M est F'_M (là où elle est dérivable) $f_M(x) = 3(1 - F(x))^2 F'(x) = 3(1 - F(x))^2 f(x)$
   Conclusion : $\boxed{f_M(x) = \begin{cases} 6x(1 - x^2)^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$
5. "le joueur gagne la partie" est l'événement $\left(M < \frac{1}{5}\right)$ de probabilité $F_M\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{25}\right)^2 = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^3$
   Conclusion : $\boxed{P(G) = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^3}$

①. f est continue sur $[0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0

- $\forall x \geq 0$, $e^{-x^2/2} \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$
et par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

- Soit $A > 0$ $\displaystyle\int_0^A x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A$

$$= 1 - e^{-\frac{A^2}{2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx = 1$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Sa fonction de répartition F est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Si $x < 0$ $F(x) = 0$

Si $x \geq 0$ $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$ (d'après la question précédente).

② $Y = X^2$ et G la fonction de répartition de Y.

$$G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$$

Si $x < 0$ $G(x) = 0$

Si $x \geq 0$ $G(x) = P(X \leq \sqrt{x})$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

On reconnaît une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.